

1 Algebraische Grundlagen

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Wurzeln und Potenzen

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ Faktoren}} = a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Logarithmen

$$\log_b a = z \Leftrightarrow b^z = a$$

$$\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^z = z \cdot \log_b u$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

Geradengleichung

$$y = m \cdot x + t$$

(allgemeine Form)

$$y = m \cdot (x - x_0) + y_0$$

(Punkt-Steigungs-Form)

Parabelgleichung

$$y = ax^2 + bx + c$$

(allgemeine Form)

$$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

(Scheitelform)

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

(Linearfaktorform)

Lösungsformel für die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2 Analysis

Symmetrie bezüglich des Koordinaten- systems	$\left. \begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ \text{für alle } x \in D_f \end{array} \right\} \Rightarrow$	G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. (f heißt dann gerade Funktion.)
	$\left. \begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \\ \text{für alle } x \in D_f \end{array} \right\} \Rightarrow$	G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung. (f heißt dann ungerade Funktion.)

Differenzen- quotient	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	(Sekantensteigung bzgl. x_0 und x)
----------------------------------	---------------------------------	---

**Ableitung $f'(x_0)$
(Differential-
quotient)** Besitzt der Graph G_f an der Stelle x_0 eine eindeutige Tangente,
so wird die Steigung dieser Tangente mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Dann gilt:
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Schreibweisen:
$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Ableitung der Grundfunktionen	$\frac{d}{dx} x^r = r \cdot x^{r-1}$	$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^r} = - \frac{r}{x^{r+1}}$
	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
	$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$	$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
	$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	

Ableitungsregeln	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
	$f(x) = c \cdot u(x)$	$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$
	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Monotoniekriterium	$f'(x) < 0$ im Intervall I	$\Rightarrow G_f$ fällt streng monoton in I.
	$f'(x) > 0$ im Intervall I	$\Rightarrow G_f$ steigt streng monoton in I.
Art von relativen Extrema	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow f$ hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum.
	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow f$ hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.
Graphen-Krümmung	$f''(x) < 0$ im Intervall I	$\Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt.
	$f''(x) > 0$ im Intervall I	$\Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt.
Wendepunkt	Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.	
Terrassenpunkt	Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt.	
Stammfunktion	F heißt Stammfunktion von f, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$.	
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	Ist f eine in $[a; b]$ stetige Funktion, so ist die Integralfunktion $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ differenzierbar und F_a ist eine Stammfunktion von f.	
Bestimmtes Integral	F ist Stammfunktion von f. $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	
Partielle Integration	$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$	
Integration durch Substitution	Wird $g(x)$ durch z ersetzt, so gilt: $\int_a^b f(g(x)) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot \frac{1}{g'(x)} dz$	

**Volumen eines
 Rotationskörpers**

Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx$$

Rotation um die y-Achse:

$$V = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(x))^2 dx$$

**Unbestimmte
 Integrale**

$$\int (g(x) + h(x)) dx = \int g(x) dx + \int h(x) dx$$

$$\int k \cdot g(x) dx = k \cdot \int g(x) dx$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$$

$$\int (a \cdot e^{k \cdot x} + y_0) dx = \frac{a}{k} \cdot e^{k \cdot x} + y_0 \cdot x + C$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \ln x dx = -x + x \cdot \ln x + C$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + C$$

wobei F eine
 Stammfunktion von f ist.

Grenzwerte

Für $r > 0$ gilt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r \cdot e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \cdot \ln x = 0$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ω sei der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments und
 $A, B \subseteq \Omega$ seien zwei beliebige Ereignisse.

Gesetze der Mengenalgebra	$\bar{\bar{A}} = A$ $\bar{A} = \Omega \setminus A$	$A \cap \bar{A} = \{ \}$ $A \setminus B = A \cap \bar{B}$
Gesetze von De Morgan	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Unvereinbarkeit	$A \cap B = \{ \} \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ heißen unvereinbar.}$	
Ereignis- wahrscheinlichkeiten	$P(\{ \}) = 0$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$P(\Omega) = 1$
Satz von Sylvester	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	
Unabhängigkeit von zwei Ereignissen	$P_A(B) = P(B)$ oder $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$ oder $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind stochastisch unabhängig.}$	
Fakultät	$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ Der Wert $n!$ gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.	
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen.	
Laplace-Experiment	Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes gleich wahrscheinlich sind. Es gilt dann: $P(A) = \frac{ A }{ \Omega }$	

**Wahrscheinlichkeits-
 verteilung einer
 Zufallsgröße**

Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ an.

Dann gilt:

Die Zuordnung P mit $P(X=x_1)=p_1, P(X=x_2)=p_2, \dots, P(X=x_n)=p_n$ heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

• **Erwartungswert**

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \\ &= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n\end{aligned}$$

• **Varianz**

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \\ &= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n \\ \text{Var}(X) &= E(X^2) - \mu^2 \quad (\text{Verschiebungsregel})\end{aligned}$$

• **Standardabweichung**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

**Binomialverteilte
 Zufallsgröße**

Eine Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p .

Dann gilt:

- X heißt binomialverteilt, genauer $B(n; p)$ -verteilt.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X heißt Binomialverteilung.
- $P(X=k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $k = 0, 1, \dots, n$
- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypothesentest

Beim Testen der Nullhypothese H_0 in einem Signifikanztest mit Signifikanzniveau α können zwei Fehler auftreten:

- Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
- Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Das Signifikanzniveau α des Tests ist die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

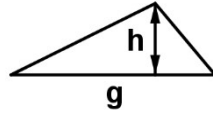
4 Geometrie

Flächengeometrie

A: Flächeninhalt
 U: Umfang

Allgemeines Dreieck:

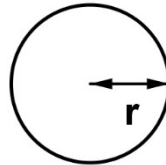
$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$



Kreis:

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

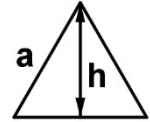
$$A = r^2 \cdot \pi$$



Gleichseitiges Dreieck:

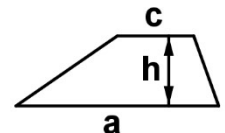
$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$



Trapez:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

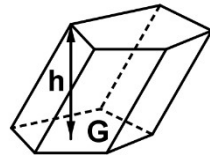


Raumgeometrie

V: Volumen
 G: Grundfläche
 M: Mantelfläche
 O: Oberfläche

Prisma:

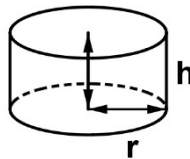
$$V = G \cdot h$$



Gerader Kreiszylinder:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

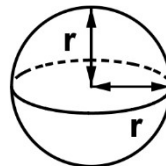
$$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$



Kugel:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$



Pyramide:

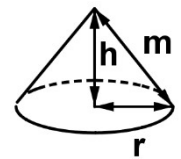
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$



Gerader Kreiskegel:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$M = r \cdot \pi \cdot m$$



Ortsvektor

Ortsvektor des Punktes $A(a_1 | a_2 | a_3)$:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor

Verbindungsvektor der Punkte A und B: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Geradengleichung

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

(Parameterform)

Ebenengleichung

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

(Parameterform)

$$E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$$

(Koordinatenform)

$$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

(Normalenform)

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

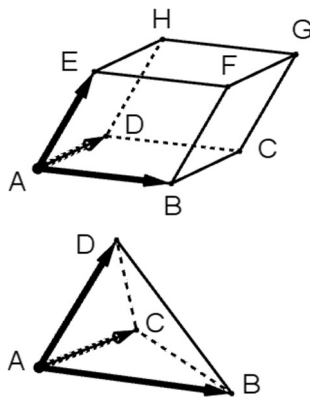
**Eigenschaften
 und Anwendungen
 des Skalarprodukts**

- Betrag von $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor von $\vec{a}$: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- φ ist Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

**Eigenschaften
 und Anwendungen
 des Vektorprodukts**



- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$.
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$
- Maßzahl F_{Δ} des Flächeninhalts des Dreiecks ABC: $F_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$
- Maßzahl V des Volumens eines Spats ABCDEFGH: $V = \left| (\vec{AB} \times \vec{AD}) \circ \vec{AE} \right|$
- Maßzahl V des Volumens einer dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \cdot \left| (\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AD} \right|$

Komplanarität

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind komplanar.
- $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind parallel zu einer gemeinsamen Ebene.
- $\Leftrightarrow \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$ ist NICHT NUR mit $\lambda = \mu = \nu = 0$ lösbar.
- $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = 0$

Kollinearität

- $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sind kollinear. $\Leftrightarrow$ Es gibt einen Wert μ , für den gilt: $\vec{a} = \mu \cdot \vec{b}$ oder $\vec{b} = \mu \cdot \vec{a}$. $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

**Besondere
 Punkte**

- Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$: $\vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB})$
- Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC: $\vec{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

5 Trigonometrische Grundlagen

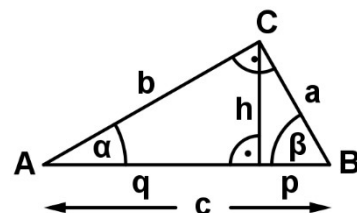
Rechtwinkliges Dreieck

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

Kathetensatz: $a^2 = cp$; $b^2 = cq$

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\cos \alpha = \frac{b}{c}$; $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$

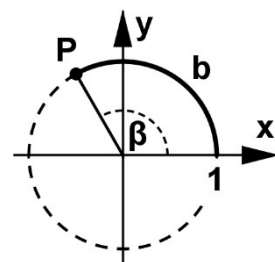


Beziehungen am Einheitskreis

- $P(x_p | y_p)$ liegt auf dem Einheitskreis.

$\Rightarrow \cos(\beta) = x_p$; $\sin(\beta) = y_p$

- $\frac{b}{\pi} = \frac{\beta}{180^\circ}$



Trigonometrische Beziehungen

$(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$

$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$

$\cos(-\varphi) = \cos \varphi$

$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$

$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$

Additionstheoreme

$\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$

$\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \varphi)$

$\cos(2\varphi) = (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2$

$\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos \varphi)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

[Stand der Merkhilfe: 21.09.2026]